УДК 513.85

А.Г. КОШОВИЙ, ст. викл., НАУ «ХАІ», Харків;
Г.І. КОШОВИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НАУ «ХАІ» Харків

ДЕКАРТОВІ ДОБУТКИ ОДНОВИМІРНИХ ФРАКТАЛІВ: ФРАКТАЛЬНІ МЕРЕЖІ НА ПЛОЩИНІ

Досліджуються декартові квадрати та добутки ніде не щільних досконалих множин на прямій. Доведено, що ці декартові добутки являються фрактальними множинами в площині. Детально проаналізовані три класи фрактальних мереж у площині та проведено їх узагальнення. Виявлені можливості насичення чи розрідження мереж за допомогою зміни фрактальної розмірності.

Проводиться исследование декартовых квадратов и произведений нигде не плотных совершенных множеств на прямой. Доказано, что эти декартовы произведения являются фрактальными множествами на плоскости. Детально проанализированы три класса фрактальных сетей на плоскости и проведено их обобщение. Обнаружены возможности насыщения или разрежения сетей с помощью изменения фрактальной размерности.

Cartesian squares and products of nowhere dense perfect sets in line are studied. Has been proved that these products are the fractal sets in the plane. Three classes of fractal networks in the plane and their generalizations have been analyzed in details. The possibilities of saturation or rarefaction for networks by changing the fractal dimension are found.

Вступ. Для спостереження за станом складного об’єкту (літака, турбіни, нафтопроводу, мосту тощо) використовують мережі вбудованих датчиків. Вони забезпечують інформацією про стан конструкції об’єкта, про режим роботи окремих вузлів і тому подібне. Це може бути більш досконалим і менш затратним, коли мережа матиме дофрактальну структуру. Впорядкованість мережі у відповідності до певної стадії побудови самоподібного фракталу на площині є найбільш природною[1]. Зрозуміло, що при цьому мають бути відповідні класи двовимірних фрактальних множин (ФМ), які відображають, зокрема, конструкцію всього об’єкта та певних його частин.

В даній роботі проводиться дослідження кількох класів ФМ на площині. За основу їх творення беруться класи ФМ на прямій та їх системний аналіз [2,3]. При цьому використовуються декартові квадрати та добутки одновимірних ФМ. Зрозуміло, що ФМ на площині є ідеальним математичним об’єктом, але стадії її побудови, які можна назвати *дофрактальними множинами*, є реальними. Як раз вони і можуть вказувати на математичний закон розташування датчиків в мережі. Відповідно такі мережі доречно називати дофрактальними.

Найпростішим двовимірним фракталом є пил Кантора[4]. Він є декартовим квадратом ніде не щільної досконалої множини (НЩДМ) на сегменті, яку називають дисконтинуумом Кантора[1]. Використовуючи узагальнення цієї НЩДМ, що приводить до НЩДМ чи ФМ зі змінною розмірністю Хаусдорфа, перейдемо до дослідження їх декартових квадратів.

Декартові квадрати НЩДМ. Почнемо з найпростішого класу НЩДМ на прямій, розмірність Хаусдорфа для яких визначається виразом $\ln 2 : \ln \kappa$, де κ – коефіцієнт самоподібності [3]. Класична НЩДМ (*дисконтинуум Кантора*) є частинним випадком з $\kappa = 3$. У загальному випадку κ є дійсним числом, більшим за 2. Оскільки утворювач кожної множини даного класу складається з двох сегментів, то позначимо їх $C_2(\kappa)$. Щоб розібратись в деталях з декартовим добутком

$$C_2^2(\kappa) = C_2(\kappa) \times C_2(\kappa),$$

візьмемо у якості її носія декартовий квадрат сегмента $[-1,1]$. Далі побудуємо декартовий квадрат утворювача $C_2(4)$, що відповідає чотирьом великим квадратам, зображеним на рис.1. Друга стадія, що відповідає зменшенням лінійних розмірів і заміщенням, зображена шістнадцятьма маленькими квадратами. Для стадії побудови з номером n маємо 4^n елементів (квадратів), які зменшені, у порівнянні з носієм у κ^{2n} разів за площею. Якщо спробувати знайти площу $C_2^2(\kappa)$, то маємо границю послідовності $\left(4 : \kappa^2\right)^n$. За рахунок того, що $\kappa > 2$, маємо

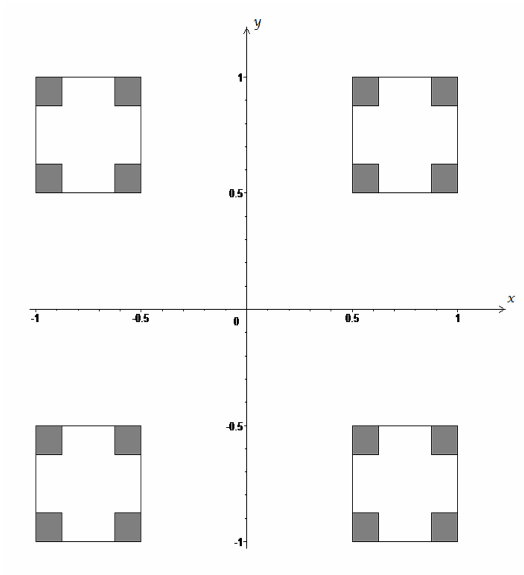

Рисунок 1 – Дві стадії побудови $C_2^2(4)$.

$$S\left(C_2^2(\kappa)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\kappa}\right)^{2n} = 0.$$

Більш того, оскільки $C_2(\kappa)$ не може містити в собі жодного інтервалу, то теж саме можна казати і про $C_2^2(\kappa)$. Отже, топологічна розмірність $C_2^2(\kappa)$, як і $C_2(\kappa)$, є нульовою. Ось чому $C^2(3)$ називають *двовимірним пилом Кантора*.

Розрахуємо розмірність Хаусдорфа (PX чи dH). Для цього повернемось до стадії побудови за номером n, що складається з 4^n квадратів зі стороною $2 : \kappa^n$. Їх діаметр (він є діагоналлю) буде $\delta_n = 2\sqrt{2} : \kappa^n$. Для визначення s *-міри Хаусдорфа* маємо досліджувати границю послідовності

$$4^n \cdot \delta_n^s = \left(\frac{4}{\kappa^s}\right)^n \cdot 2^{\frac{3s}{2}} .$$

Те значення параметра s, при якому здійснюється перехід від нескінченності до нуля, і є розмірністю Хаусдорфа. Очевидно, що критичне значення знаходиться з рівності $4 = \kappa^{s_0}$ натуральним логарифмуванням. Отже, $s_0 = dH = \ln 4 : \ln \kappa = 2 \ln 2 : \ln \kappa$. Якщо порівняти цей вираз зі значенням PX для $C_2(\kappa)$, то отримаємо наступне співвідношення:

$$dH(C_2^2) = 2dH(C_2) . \tag{1}$$

Зрозуміло, що воно є природнім для розмінностей, але зовсім не елементарним. Це ми побачимо при дослідженні декартових добутків для різних представників навіть одного класу ФМ.

В залежності від коефіцієнта самоподібності дофрактальна мережа може бути і надзвичайно розрідженою і досить наповненою. Її наповненість можна також збільшувати, обираючи інший клас ФМ. Покажемо це на прикладі наступного класу НЩДМ, який позначимо $C_3(\kappa)$. Тут у якості утворювача буде три сегменти з однаковою відстанню між ними. Цей клас, як і попередній, був детально досліджений на рівні системного аналізу [3]. Зокрема була розроблена структурна схема процесу побудови довільного представника цього класу ФМ. Вона відігравала провідну роль при створенні математичних моделей взаємодії плоско поляризованої електромагнітної хвилі з дофрактальною системою стрічок. Ця структурна схема є важливою і для дослідження фрактальних мереж на площині.

Дослідження фрактальної мережі $C_3^2(\kappa)$ почнемо з першої стадії його побудови – *дофрактала першої генерації*. Використовуючи попередній носій для $C_3^2(\kappa)$ отримаємо систему квадратів, що налічує дев'ять елементів. Четверта частина цієї дофрактальної мережі для $\kappa = 5$ зображена на рис.2.

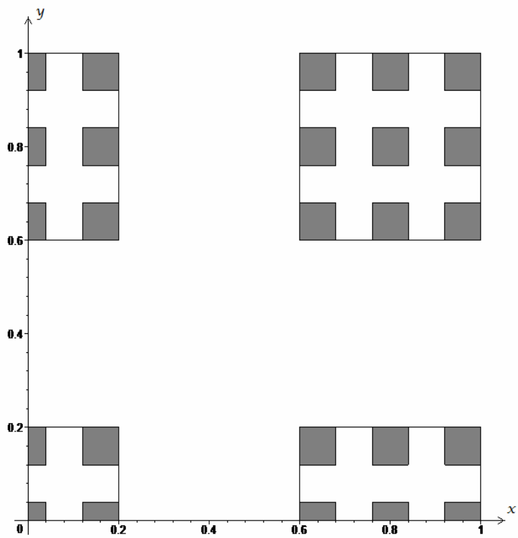

Рисунок 2 – Чверть перших двох стадій $C_3^2(5)$.

На повному квадраті першої стадії зображено дев'ять квадратів другої генерації. Всього їх буде $81 = 9^2$. Для генерації з номером n кількість квадратів буде 9^n. Їх діаметри (те ж саме, діагоналі) зменшились у порівнянні з носієм у κ^n разів. Тобто, для РХ маємо наступний вираз $dH = \ln 9 : \ln \kappa$. Якщо $\kappa = 5$, тобто розміри сегмента утворювача $C_3(5)$ однакові зі щілинами між ними, маємо

$$dH\left(C_3^2(5)\right) = 2dH\left(C_3(5)\right) = 2\ln 3 : \ln 5 .$$

Взагалі, для декартових квадратів ФМ будь-якого класу має місце співвідношення (1). При навіть поверхневому порівнянні рис.1 з рис.2 очевидна більша насиченість мережі $C_3^2(\kappa)$. Коли взяти ще більшим нижній індекс, то отримаємо ще більшу насиченість. Зрозуміло, що насиченість мережі суттєво залежить від κ.

Отже, структура дофрактальної мережі $C_n^2(\kappa)$, що являє собою певну стадію побудови декартового добутку НЩДМ на сегменті $[-1,1]$, складається з блоків по n^2 квадратів. Відстань між елементами кожного блоку окремо і відстань між блоками визначається коефіцієнтом подібності ФМ. Параметри n $(n \in N)$ та κ повністю визначають PX певного класу фрактальних мереж:

$$dH\left(C_n^2(\kappa)\right) = 2dH\left(C_n(\kappa)\right) = 2\ln n : \ln \kappa .$$

При цьому $\kappa > n$: сегменти утворювача $C_n(\kappa)$ мають бути відокремленими хоч і досить маленькими щілинами. Слід також зазначити, що κ є дійсним числом на відміну від натурального n.

Окрім декартових добутків $C_n(\kappa)$ самих з собою можна утворювати добутки $C_n(\kappa_1)\times C_n(\kappa_2)$, $C_n(\kappa)\times C_m(\kappa)$ та $C_n(\kappa_1)\times C_m(\kappa_2)$. Це значно розширює поняття фрактальної мережі. Проведемо дослідження по одному з наведених вище трьох

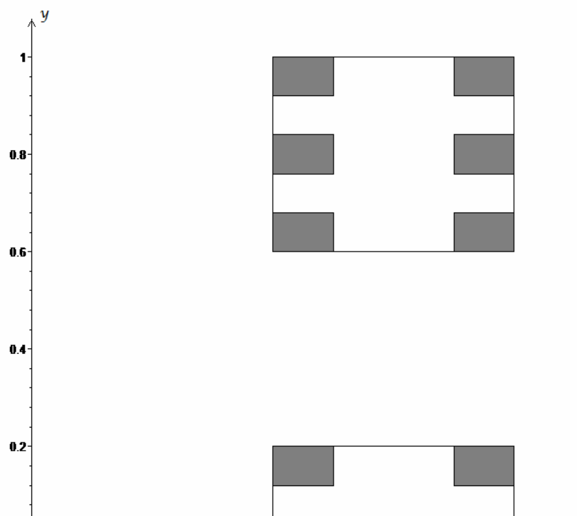

Рисунок 3 – Чверть двох перших генерацій $C_2(4)\times C_3(5)$.

класів декартових добутків.

Декартові добутки НЩДМ. Почнемо з декартового добутку $C_2(3)\times C_2(4)$. Подібно до декартових квадратів у якості носія беремо $[-1,1]^2$. На n-тому кроці побудови отримуємо 4^n прямокутників зі сторонами $2/3^n$ та $2/4^n$. Їх діаметри (діагоналі) визначаються

$$2\sqrt{\frac{1}{9^n}+\frac{1}{16^n}}=\frac{2}{3^n}\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}}=\delta_n$$

Мінімальне покриття $C_2(3)\times C_2(4)$ з цим значенням δ_n налічує 4^n кругів. Для обчислення s-міри Хаусдорфа слід досліджувати границю послідовності

$$4^n\delta_n^s=\left(4/3^s\right)^n 2^s\left(1+\left(3/4\right)^{2n}\right)^{s/2}.$$

Те значення параметра s при якому здійснюється перехід від нескінченості до нуля для s-міри і є розмірністю Хаусдорфа. Очевидно, $dH=\ln 4/\ln 3$. Таким чином,

$$dH\left(C_2(3)\times C_2(4)\right)=2dH\left(C_2(3)\right)\neq dH\left(C_2(3)\right)+dH\left(C_2(4)\right).$$

У загальному випадку, якщо $\kappa_1<\kappa_2$, то маємо

$$dH\left(C_n(\kappa_1)\times C_n(\kappa_2)\right)=2dH\left(C_n(\kappa_1)\right).$$

Наступним декартовим добутком буде $C_2(\kappa_1)\times C_3(\kappa_2)$. Розмірковування подібні до попередніх приводять до картини, четверта частина якої наведена на рис.3. Тут зображена чверть декартового добутку другої генерації $C_2(3)\times C_3(5)$. Маємо представників різних класів з різними коефіцієнтами самоподібності. Це найбільш загальний випадок декартового добутку. Для n-тої стадії побудови фрактальної мережі буде 6^n елементів. Покриття з

$$\delta_n=\sqrt{1/3^n+1/5^n}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}(1/3^n)\sqrt{1+\left(3/5\right)^n}$$

приводить до наступного виразу s-міри Хаусдорфа:

$$H^s=\lim_{n\to\infty}H^s_{\delta_n}=\lim_{n\to\infty}6^n\cdot\frac{1}{(3^s)^n}\left(2\left(1+(3/5)^n\right)\right)^{s/2}.$$

Звідси отримаємо вираз для розмірності Хаусдорфа

$$dH=\log_3 6=1+\log_3 2.$$

Цей вираз виникає перетворенням співвідношення $6=3^{dH}$ за допомогою логарифмування за основою 3. Очевидно,

$$dH\left(C_2(3)\times C_3(5)\right)\neq dH\left(C_2(3)\right)+dH\left(C_3(5)\right).$$

При узагальненні на довільні коефіцієнти подібності виникає наступний вираз для РХ:

$$dH\left(C_2(\kappa_1)\times C_3(\kappa_2)\right)=\log_{\min(\kappa_1,\kappa_2)}6 .$$

Відповідно в ще більш загальному випадку

$$dH\left(C_n(\kappa_1)\times C_m(\kappa_2)\right)=\log_{\min(\kappa_1,\kappa_2)}n\cdot m .$$

І, нарешті, частинний випадок евклідового добутку $C_n(\kappa)\times C_m(\kappa)$ розберемо на прикладі параметрів $n=2$, $m=3$, $\kappa=5$. Але перед цим слід зазначити, що $\kappa>\max(n,m)$, та сегменти утворювача мають бути відокремленими. З огляду на рис.3., де приведена чверть перших двох стадій побудови евклідового добутку $C_2(5)\times C_3(5)$, для покриття фрактальної мережі з $\delta_n=\sqrt{2}/5^n$ маємо 6^n елементів. Тому, дослідження s-міри Хаусдорфа приводить до границі послідовності $\left(6/5^5\right)^5\sqrt{2}^s$. Звідси маємо рівність $6=5^n$. Або логарифмуючи її за основою 5 перейдемо до формули

$$dH(C_2(5)\times C_3(5))=\log_5 6 .$$

Узагальнюючи на довільні n та m і $\kappa>\max(n,m)$ отримаємо наступний вираз:

$$dH(C_n(\kappa)\times C_m(\kappa))=\log_\kappa n\cdot m=\log_\kappa n+\log_\kappa m .$$

Тобто,

$$dH(C_n(\kappa)\times C_m(\kappa))=dH(C_n(\kappa))+dH(C_m(\kappa))$$

і маємо властивість розмірності евклідового квадрата.

Висновки. Проведений детальний математичний аналіз декартових квадратів та добутків трьох класів одновимірних фрактальних множин зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Доведена, зокрема, фрактальність отриманих двовимірних множин на основі розрахунку розмірностей Хаусдорфа. Встановлені певні зв’язки між розмірностями декартових добутків та відповідних одновимірних фрактальних множин. Проведено узагальнення розглянутих детально трьох класів площинних самоподібних фракталів. Виявлені можливості насичення чи розрідження дофрактальних мереж за допомогою зміни розмірності.

Список літератури: **1.** *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, – 2002, – 656с. **2.** *Кошовий Г.І.* Системний підхід до дослідження дофрактальних дифракційних граток. //Радіофізика та електроніка, – 2011, Том 2(16), – №1. – С..3-10. **3.** *Кошовий Г.І., Кошовий А.Г.* Одновимірні самоподібні фрактали та їх використання у моделюванні. //Вісник Національного політехнічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – Вип. №42. – С. 82-89. **4.** *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001, – 528с.

Надійшла до редколегії 03.04.2012